微分流形与黎曼几何
aka 微分流形及应用

Differenial Manifolds and Riemannian Geometry
aka Differential Manifold and its application

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

数学与系统科学学院，北京航空航天大学
School of Mathematics and Systems Science, Beihang University

April 27, 2012

Chapter 4: 微分形式与积分 Differential forms and integration

线积分

Definition (区间积分)

给定ω为$[a,b]$上微分1形式，定义：$\int_{[a,b]}\omega=\int_a^b f(t)dt$.
注记：定义与参数化无关(微分同胚不变)$\int_{[a,b]}\omega=\int_{[c,d]}\phi^*\omega$

Definition (流形上线积分)

$r:[a,b]\to M$是光滑曲线，$\omega\in\mathcal{T}^*(M)$，定义：$\int_r\omega=\int_a^b r^*\omega$.
可推广到分段光滑曲线。
注记：任意两点可以被分段光滑曲线相连。

Proposition

计算公式：$\int_r\omega=\int_a^b r^*\omega=\int_a^b\omega_{r(t)}(r'(t))dt$

线积分微积分定理

Proposition

- 线性：
- 曲线叠加：$\int_r\omega=\int_{r_1}\omega+\int_{r_2}\omega$
- r是常映射，$\int_r\omega=0$
- 参数化不变：$\tilde{r}=r\circ\phi$, $\int_r\omega=\int_{\tilde{r}}\omega$

Theorem (线积分的微积分定理)

光滑流形M上光滑函数f，$r:[a,b]\to M$是一个分段光滑曲线,有
$\int_r df=f(r(b))-f(r(a))$

$\boxed{\text{PROOF:}}$ $\int_r df=\int_a^b df_{r(t)}(r'(t))dt=\int_a^b(f\circ r)'(t)dt$.

积分与体积

Remark

- 积分的定义： $I = \int_\Omega f(p)dV_p$;
  推广到流形： f, dv_p?
- 坐标变换： $I = \int_{U=\psi^{-1}(\Omega)} f(\psi(y))d(\psi(V_y))$,
  推广到流形： $d(\psi(V_y)) = det\psi dV_y$?
- 行列式： 反对称的n阶协变张量!
- 线积分: $\int_r \omega = \int_a^b r^*\omega = \int_a^b \omega(r'(t))dt$
- 线积分的参数化变换公式： $\int_r \omega = \pm \int_{\hat{r}\omega}$
  积分方向 $\rightarrow$ 流形的定向!

定义

给定n维线性空间V,其上的k阶协变张量是V上一个k重线性函数。记为$T^k(V)$,它是线性空间，维数为n^k，基为$dx^{i1} \otimes \dots dx^{ik}$. T是分次代数。

Definition (k-余向量)

定义线性空间V,其上的反对称的k阶协变张量为交替张量或k阶余向量；如果满足$T(X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k) = -T(X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k)$.
线性空间V上的反对称k重线性函数又称为外形式(*forms*).记为$\Lambda^k(V)$.

记$\sigma \in S(k)$是k阶置换群的元素。$sgn(\sigma)$为置换奇偶。

Proposition (等价定义)

1. T是反对称协变张量；
2. $T(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_k}) = (sgn\sigma)T(X_1, \dots, X_k)$
3. 任意两个自变量相同，则T的值为零。(或线性相关的自变量的张量值为0).

交替张量的例子

EXAMPLE (低维)

$k = 0$,数；
$k = 1$,任一协变1阶张量；
$k = 2$, $A(X, Y) = 0.5(T(X, Y) - T(Y, X))$.

Definition (反对称算子)

定义$Alt : T^k(V) \rightarrow \Lambda^k(V)$,
$Alt(T) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k}(sgn\sigma)T^\sigma$.

Proposition

$Alt(T)$是反对称的，且$Alt(T) = T$当且仅当T是反对称的。

外形式空间

记指标集$I = (i_1, \dots, i_k)$,置换σ作用有$I_\sigma = (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)})$.

Definition (基本外形式)

给定V上基E_i,对偶基δ^i，定义k形式： $A^I(X_1, \dots, X_k) = det(\delta^j(X_i)) = detX$.
其中矩阵X_j^i为X_i在基E_j下的坐标．称为k阶基本形式； 特别有$A^I = sgn(\sigma)A^{I_\sigma}$.

例如： R^3空间, $A^{13}(X, Y) = X^1Y^3 - Y^1X^3$
$A^{123}(X, Y, Z) = det(X, Y, Z)$.

Theorem (外形式空间的基)

$\Lambda^k(V)$是一个(n, k)维的线性空间。其中基为A^I，I为递增的k指标集。特别$k > n$,$\Lambda^k(V) = 0$。

证明***

Proof.

A^I是线性无关；$\sum T_I A^I = 0$,任意作用于一组子基E_{j_k},得到T_J=0;
A^I线性组合是满的。任意$T \in \Lambda^k(V)$，$T_I = T(E_{i_1}, \dots, E_{i_k})$．可以证明
$T = T_I A^I$. □

Corollary

n次形式ω在线性变换下有
$\omega(BX_1, \dots, BX_n) = detB\omega(X_1, \dots, X_n)$.

微分形式的外积

张量积：$T \otimes S(X^i, Y^j) = T(X^i)S(Y^j)$，局部表示$dx^i \otimes dy^j$；
对称张量:$ST = Sym(S \otimes T)$，$dudv = 0.5(du \otimes dv + dv \otimes du)$

Definition (外积)

已知$\omega \in \Lambda^k(V)$,$\eta \in \Lambda^l(V)$ 定义外积 $\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta)$.

Proposition

给定基本形式A^I, A^J,$A^I \wedge A^J = A^{(I,J)}$.

$\boxed{\text{proof}}$ 记指标$P = (p_1, \dots, p_{k+l})$,
验证：$A^I \wedge A^J(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}}) = A^{(I,J)}(E_{p_1}, \dots, E_{p_{k+l}})$

1. 如果P包含不在I, J的指标，或者有重复指标，等式两边为零。
2. 如果$P = (I, J)$,右边为1.左边有
   $left = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(A^I \otimes A^J) = \frac{1}{k!l!} \sum_\sigma sgn(\sigma) A^I(E_{\sigma i_k}) A^J(E_{\sigma j_l})$
   $left = AltA^I(E_{i_k}) AltA^J(E_{j_l}) = 1.$
3. 如果$P = \sigma(I, J)$,同上。

外代数

Proposition (外积的性质)

- 双线性
- 结合律 $\omega \wedge (\eta \wedge \xi) = (\omega \wedge \eta) \wedge \xi$
- 反交换律$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$
- 基表示 $A^I = \delta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \delta^{i_k}$
  一般有$\omega_1 \wedge \dots \omega_k(X_1 \dots X_k) = det(W^i(X_k))$.

Theorem

定义$\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V)$,$\Lambda^*(V)$在外积下是一个反交换的分次代数。
称为外代数。

可以有外积的其他定义：$\omega \wedge \eta = Alt(\omega \otimes \eta)$，计算不方便。

微分形式

Definition (微分形式)

记$\Lambda^k M = \coprod_p \Lambda^k(T_p M)$为向量丛， 称其任一截面为一个$k$阶微分形式。
所有微分形式记为$\mathcal{A}^k(M)$.
类似有$\mathcal{A}(M) = \bigoplus_k \mathcal{A}^k(M)$为一个外代数。

局部坐标表示$w = w_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \omega_I dx^I$

Proposition

光滑映射$F : M \to N$，诱导映射$F^* : \mathcal{A}(N) \to \mathcal{A}(M)$. 有

- F^*是线性的；
- $F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$
- 局部坐标$F^*(w_I dy^I) = \sum (\omega_I \circ F) d(Y^I \circ F)$
- n次形式的坐标变换$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = det(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

微分算子

Remark

- 恰当形式：$\omega = df$，$\int_r \omega = f(r(b)) - f(r(a))$
- 必要条件$\frac{\partial w_i}{\partial x^j} = \frac{\partial w_j}{\partial x^i}$
- $d\omega = \sum(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} - \frac{\partial w_j}{\partial x^i})dx^i \wedge dx^j = 0$ 称为闭形式。
- 推广到任一形式?

外微分定义

Definition (外微分)

利用函数的微分算子df，可以定义微分算子$d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$，
$d\omega = d(\sum_I' \omega_I dx^I) = \sum_I' d\omega_I \wedge dx^I$.
称为外微分；$d\omega$称为外导数。

Theorem (外导数存在唯一*)**

任一光滑流形上存在唯一一个线性映射$d : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k+1}(M)$，满足

1. 对光滑函数$df(X) = Xf$
2. 反导子：$\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \eta$
3. $d \circ d = 0$.

.
特别它是局部算子$d(\omega_U) = (d\omega)_U$, 其局部坐标表示如上。

外微分存在性证明***

Proof.

假设M有一个全局坐标卡。存在性：给出d的局部坐标定义如前。

- 线性易得； 且$d(fdx^I) = df \wedge dx^I$.
- 反导子:$\omega = fdx^I, \eta = gdx^J$,
  $d(\omega \wedge \eta) = d(fgdx^I \wedge dx^J) = d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J$
- $d \circ d = 0$, 对f验证，任一$d(d\omega) = d(dw_I \wedge dx^I) = 0$.

唯一性：利用函数的微分定义的唯一性。
一般情形：局部坐标变换保证定义不变，构造全局外微分；
利用截断函数证明局部性；
再对任一局部张量场扩充为全局张量场，由局部唯一性可得全局唯一性。

□

例子与计算

EXAMPLE ($\mathcal{R}^3$外微分)

$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$;
$\eta = adx \wedge dy + bdy \wedge dz + cdz \wedge dx$

Proposition (自然性)

$G^* d\omega = d(G^* \omega)$

$\boxed{\text{Proof:}}$ 微分形式不变性:

Proposition (1次形式求值(坐标无关))

$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$

$\boxed{\text{Proof:}}$ $\omega = udv$,$d(udv)(X, Y) = XuYv - XvYu$.
可以推广到高阶。

内乘或缩并

Definition (内乘)

给定X,定义$i_X : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k-1}(M)$,使得
$i_X\omega(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_k)$.
又记为 $X \lrcorner \omega = i_X\omega$

Proposition (内乘性质)

- $i_X \circ i_X = 0$;
- $i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X\omega) \wedge \eta + (-1)^k\omega \wedge (i_X\eta)$.

$\boxed{\text{Proof:}}$
内乘平方为零易得。
后者：有一般行列式公式$det\mathbb{X} = \sum(-1)^{i-1}\omega^i(X_1)det(\mathbb{X}^{\lrcorner}_{\not{k}}$.
$X \lrcorner(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k) = \sum(-1)^{i-1}\omega^i(X)(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}^i \cdots \wedge \omega^k))$
特别$k = 2$公式可得。

李导数的对偶

李导数定义于切向量场：$[X, Y] \in T(M)$.

Theorem

设E_i为光滑流形上的局部标架场，δ^i为对应的局部余标架场。设李导数满足 $[E_j, E_k] = c^i_{jk}E_i$, 对应有外导数$d\delta^i = -c^i_{jk}\delta^j \wedge \delta^k$.

Proposition (张量李导数)

- $\mathcal{L}_X(S \otimes T) = (\mathcal{L}_X S) \otimes T + S \otimes (\mathcal{L}_X T)$
- $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\mathcal{L}_X\eta)$
- $\mathcal{L}_X(Y \lrcorner \omega) = (\mathcal{L}_X Y)\lrcorner\omega + Y \lrcorner(\mathcal{L}_X\omega)$

$\boxed{\text{outline}}$ $\mathcal{L}_X(S \otimes T) = \lim_{t\to 0} \frac{\theta_t^*((S\otimes T)_{\theta_t}) - (S\otimes T)_{\theta_0}}{t}$.

李导数的计算

Proposition (计算公式)

$\mathcal{L}_X(\omega(Y_1, \ldots, Y_k)) = \mathcal{L}_X\omega(Y_1, \ldots, Y_k) + \sum_i \omega(Y_1, \ldots, \mathcal{L}_X Y_i, \ldots, Y_k)$
即 $\mathcal{L}_X\omega(Y_1, \ldots, Y_k) = X(\omega(Y_1, \ldots, Y_k)) - \sum_i \omega(Y_1, \ldots, \mathcal{L}_X Y_i, \ldots, Y_k)$

Corollary (微分与李导数交换)

$\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_X f)$

$\boxed{\text{proof:}}$ $\mathcal{L}_X(df)(Y) = YXf$
例子:$T = T_{ij}dx^i \otimes dx^j$,
$\mathcal{L}_Y T = (YT_{ij} + T_{kj}\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + T_{ik}\frac{\partial Y^k}{\partial x^j})dx^i \otimes dx^j$.

Cartan公式

Theorem (Cartan公式)

$\mathcal{L}_X\omega = X \lrcorner(d\omega) + d(X \lrcorner \omega)$

Corollary (外微分与李导数交换)

$\mathcal{L}_X(d\omega) = d(\mathcal{L}_X\omega)$

$\boxed{\text{Proof:}}$$\mathcal{L}_X(d\omega) = d(X \lrcorner d\omega)$;
$\boxed{\text{定理证明：}}$ 递推法。
0维形式，$X \lrcorner(df) + d(X \lrcorner f) = Xf$
1维形式，$\omega = udv$,$\mathcal{L}_X(udv) = (Xu)dv + ud(Xv)$
利用反导子性质，对高阶递推可得。
$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \omega) = (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \omega + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X\omega)$

积分与带号体积

Remark

- 积分的定义： $I=\int_\Omega f(p)dV_p$;
  推广到流形： f, dv_p?
- dv_p是反对称的n阶协变张量，即n形式。但是坐标变换下det有正负号!
- 解决方法：取绝对值 或者 给出流形一个正负号!
- 线积分的参数化变换公式： $\int_r \omega = \pm\int_{\hat{r}\omega}$
  积分方向 $\rightarrow$ 流形的定向!

向量空间的方向

R^1, R^2, R^3的方向

Definition (向量空间的定向)

给定线性空间V，称任一组有序基E_i和另一组有序基E_i是定向相容的如果它们的基变换矩阵的行列式大于零。
定向相容的有序基只有两类。称为向量空间的两个定向。
指定了一类基称其为有向空间，对应的基称为正向基.(反之反向基）。

R^0，R^1, R^2, R^3的定向。

Proposition (等价定义)

给定向量空间V和其上一个非零n形式Ω，任意有序基E_i，满足$\Omega(E_1,\dots,E_n)>0$，给出了V的一个定向。

proof: 基变换对应的n形式公式$\Omega(e^1,\dots,e^n)=detB\Omega(E_1,\dots,E_n)$.
$e^1\wedge\dots e^n$给出了R^n的标准定向。

流形的方向

任一点T_pM可以给出逐点的定向。

Definition (流形的定向)

正向局部标架场E_i：如果任一点$p\in U$，$E_i(p)$在T_pM给出正定向. 给出了切空间定向的连续延拓,对应坐标卡称为正向坐标卡。
流形的定向：如果给定逐点定向的流形，在每一点邻域存在一个正向的局部标架场。给定一个定向的流形是有向流形。流形可定向或不可定向。

定向相容的坐标卡：即坐标卡间过渡函数的Jacobi行列式为正。

Proposition (等价定义)

给定流形M，如果其上存在一族定向相容的坐标卡覆盖M,则M可定向，且指定坐标卡为正向给出了一个流形的定向。 反之，命题也成立。

proof: 由于定向相容性，任一点的切空间可以给出逐点定向；局部标架场存在给出了连续的延拓；由坐标卡覆盖给出流形的一个定向。反之，由局部标架场构造出标卡，易证其是定向相容的

定向流形的判定

Proposition (非零微分形式)

M是可定向的当且仅当M上存在一个非零的n次微分形式Ω。
称为定向形式，特别称$\Omega>0$为正向的.

proof: 设$\Omega\neq 0$，可以给出一个逐点定向。任一坐标卡U,
有$\Omega=fdx^1\wedge\dots\wedge dx^n$，$U$连通，看到$f>0$或$f<0$;前者取坐标标架场;
后者令$x^1\rightarrow -x^1$,同样得到正向的标架场，从而M可以定向。
反之，构造一个全局的n形式；(局部存在);

Corollary

任意定向流形的开子流形可定向；定向流形的乘积流形可定向。

Proposition (平行化流形)

流形存在全局坐标卡称为可以平行化流形。它们必然可以定向。

proof: 由全局标架场给出定向。

定向流形的例子

EXAMPLE (平行化流形)

R^n,T^n,S^1,S^3
李群：都可平行化。

不可定向流形：Mobius 带。

Theorem

任一连通不可定向流形存在可定向的覆盖流形(两重覆盖).

Definition (保定向映射)

M, N是定向光滑流形，光滑映射$F: M \to N$是保定向的如果 任一p, F_*将T_pM的正向基映射到$T_{F(p)}N$的正向基。
F是局部同胚才有定义。如果映射到负向基称为反定向映射。

$F: M \to N$是保定向的当且仅当F的Jacobi行列式为正。

子流形的定向

Definition (沿子流形的向量场)

给定S是M的浸入子流形，定义：连续映射$N: S \to TM$,满足$N(p) \in T_pM$, 称为沿S的向量场。
特别称N与S是横截的，如果N_p和T_pS线性无关。

Theorem (超曲面的定向)

M是n维可定向光滑流形，S为超曲面，N为沿S的横截向量场。 则S存在唯一定向使得$(E_1, \ldots, E_{n-1})$为正向基当且仅当$(N_p, E_1, \ldots, E_{n-1})$为$T_pM$的正向基。
Ω为M的定向形式，则$(N \lrcorner \Omega)|_S$是S的定向形式。

$\boxed{\text{proof:}}$ 仅需证明$\omega = (N \lrcorner \Omega)|_S$是定向形式， 即非零。
S^n可以定向，记$N = x^i\partial/\partial x^i$.称为标准定向。一般的正则水平集可以定向。

带边流形的边界向量场

Remark (Review)

带边流形:局部坐标卡同胚与$H^n: \{(x^1, \ldots, x^n): x^n \geq 0\}$开子集。
边界是$n-1$维嵌入子流形。局部坐标$\phi(p) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$.

Definition (内向向量场)

向量场N沿∂M的内向向量场，如果每一点p附近存在曲线，使得$r(0) = p, r'(0) = N_p$,且$N_p \notin T_p(\partial M)$.
$-N$称为沿∂M的外向向量场。

Proposition (判定)

- 内向向量场在局部坐标的表示$N_p = X^i\partial x^i$满足$X^n > 0$.
- 任一光滑带边流形存在沿∂M的外向向量场。

$\boxed{\text{proof:}}$ 从局部构造：$N = -X^n\partial x^n$到流形。

带边流形的定向

Theorem (边界的诱导定向)

给定带边流形M,如果M可定向，则∂M可定向，其诱导定向由外向向量场决定。又称为$Stokes$定向。

$\boxed{\text{proof:}}$给定$\Omega, N \lrcorner \Omega$诱导边界的定向。
注记：它与外向向量场选取无关。

EXAMPLE

S^n作为B^n的边界可定向，且与标准定向相同。
R^{n-1}作为H^n的边界可定向，
$N = -X^n\partial x^n$, $\Omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$,
$N \lrcorner \Omega = (-1)^{n-1}dx^n(N)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$
仅当n为偶数时，与标准定向相同。

注记：一般如果边界的局部坐标卡可以扩充到流形上，其坐标映射是保定向的当且仅当 看成是保定向的。

定向黎曼流形

Theorem (黎曼体积形式)

如果(M,g)可定向，存在唯一定向形式满足$\Omega(E_1,\dots,E_n)=1$,对任一正交标架场。
称为黎曼体积形式，记为dV_g.
局部坐标$dV_g=\sqrt{det(g_{ij})}dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$.

proof: $\Omega=e^1\wedge\dots\wedge e^n$.
一般基变换$\partial x^i=AE^i$，有$det(g_{ij})=(detA)^2$，$dV_g=detA\partial x^1\wedge\dots\wedge\partial x^n$.

Theorem (带边黎曼流形)

任一带边黎曼流形存在唯一一个沿∂M的单位外向法向量场N,
即$<N_p,T_p(\partial M)>=0$。
可定向带边黎曼流形的边界诱导定向有$d\tilde{V}_g=(N\lrcorner dV_g)|_{\partial M}$.

proof: 局部存在，唯一。且是正交基，所以单位体积形式。

欧氏空间的积分

Remark (多重黎曼积分)

定义：$I:D\to R, I=\int_D fdV$
判定：f有界且几乎处处连续。
特别：有界连续函数在有界积分域D上可积，如果∂D测度为零。称为可积区域。

Definition (微分形式的积分)

给定可积区域$D\subset R^n$，任一n形式$\omega=fdx^1\wedge\dots\wedge dx^n$，可以定义积分$\int_D\omega=\int_D fdv=\int_D fdx^1\dots dx^n$.

- 给定一个开集U上有紧致支集的n形式：可以定义一个可积区域；$K\subset D\subset U$
- 积分$\int_U\omega=\int_D\omega$且与$D$的选取无关；
- 类似可以定义H^n上的开集积分$\int_V\omega=\int_{D\cap H^n}\omega$; 还可定义广义积分(无界区域).

流形上的积分

Proposition

给定D,E是可积区域；任一$G:D\to E$为光滑映射， 且限制在$Int(D)\to Int(E)$上是保定向的微分同胚，则
$\int_E\omega=\int_D G^*\omega$ (反定向同胚加负号；)
特别有微分同胚保持积分不变。任两个开集保定向微分同胚，则$\int_V\omega=\int_U G^*\omega$

proof: $\int_E\omega=\int_D(f\circ G)|det(DG)|dV$ 微分同胚保持边界和零测度集。

Definition (流形上的局部积分)

设有向流形上ω的紧致支集包含于一个正向坐标卡(U,ϕ), 定义$\int_M\omega=\int_{\phi(U)}(\phi^{-1})^*\omega$.

以上定义与正向坐标卡选取无关；
类似可以定义到带边流形的坐标卡上；

流形上的积分

Definition (流形上的积分)

设(U_i,ϕ_i)覆盖$supp\omega$, ψ_i为对应的单位分解；定义ω的积分$\int_M\omega=\sum_i\int_M\psi_i\omega$.

Proposition (well-defined)

以上定义与坐标卡或单位分解的选取无关。

Proof.

设$(\tilde{U}_i,\tilde{\phi}_i)$另一组覆盖，$\tilde{\psi}_i$另一组单位分解；
$\int_M\omega=\sum_i\int_M\psi_i\omega=\sum_{i,j}\int_M\tilde{\psi}_j\psi_i\omega$ □

零维流形： $\int_M f=\sum_p\pm f(p)$.

积分的属性

Proposition

1. 线性;$\int_M a\omega + b\eta = a\int_M \omega + b\int_M \eta$
2. 定向反向：设$\bar{M}$是M赋予相反的定向，$\int_{\bar{M}}\omega = -\int_M \omega$
3. 非负性:设ω是正向n形式，$\int_M \omega > 0$
4. 微分同胚不变：$F: N \to M$保定向同胚，$\int_M \omega = \int_N F^* M$

Proof.

1. 微分形式的线性;
2. 反向微分同胚的结果;
3. 单位分解+局部正;
4. 利用单位分解, $\omega = \sum \psi_i \omega$;
   在局部坐标卡$(F^{-1}(U), \phi \circ F)$上验证积分相等;

□

积分的计算

Proposition

令可定向流形$M = \cup E_i$, E_i可积区域，仅在边界相交；设存在局部参数化表示$F_i : D_i \to M$，满足 $F(D_i) = E_i$,在内部为保定向同胚，则 $\int_M \omega = \sum_i \int_{D_i} F_i^* \omega$.

$\boxed{\text{Outline:}}$ 设ω包含于一个坐标卡(U, ϕ).
$A_i = \bar{U} \cap E_i$, $B_i = F_i^{-1}(A_i), C_i = \phi(A_i)$
$\int_M \omega = \sum_i \int_{C_i} (\phi^{-1})^* \omega = \sum_i \int_{B_i} F_i^* \omega$
$\boxed{\text{例子：}}$ 给定$R^3 \backslash \{0\}$上2-形式
$\Omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$.
取球面坐标表示(ϕ, θ),球面由两个坐标卡覆盖。$D_1 = [0,\pi] \times [0,\pi], D_2 = [0,\pi] \times [\pi, 2\pi]$. 利用局部坐标卡直接计算单位球面上的积分$\int_{S^2(1)} \Omega = 4\pi$;

Stokes定理

Theorem

M是n维光滑定向带边流形，ω是紧致支集的$n-1$形式，
$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.

Proof.

设结果在$M = H^n$时成立(待证);
如果ω位于一个坐标卡内，
$\int_M d\omega = \int_{H^n} (\phi^{-1})^* d\omega = \int_{H^n} d\left((\phi^{-1})^*\omega\right)$
右边对应于$\int_{\partial H^n} \left((\phi^{-1})^*\omega\right) = \int_{\partial M}\omega$，因为$\phi$保边界的定向;
如果ω不是位于一个坐标卡内，
$\int_{\partial M}\omega = \sum_i \int_{\partial M} \psi_i \omega = \sum_i \int_M d(\psi_i\omega) = \int_M d\omega$

□

H^n上Stokes定理的证明

Proof.

不妨设积分区域为长方形$A = [-R, R] \times \cdots \times [-R, R] \times [0, R]$.
$\omega = \omega_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n = \omega_i dV^i$;
$d\omega = \sum (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dV$
$\int_{H^n} d\omega = (-1)^n \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \omega_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) dV^n$
$\int_{\partial H^n} \omega = \sum \int_{A \cap \partial H^n} \omega_i d\hat{V}^i$
$dx^n|_{\partial H^n} = 0, \int_{\partial H^n} \omega = \int_{A \cap \partial H^n} \omega_n d\hat{V}^n$
$d\hat{V}^n = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$,其定向和(Stokes)诱导定向差$(-1)^n$; 有
$\int_{\partial H^n} \omega = (-1)^n \int_{-R}^{R} \cdots \int_{-R}^{R} \omega_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) dV^n$.

□

积分定理的推广

Remark

一维Stokes 定理：线积分$\int_r df = f(r(b)) - f(r(a))$
二维Green定理：$\int_D(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial})dxdy = \int_{\partial D} Pdx + Qdy$
无边流形或恰当形式：$\int_M d\omega = 0$
黎曼流形：

Remark (积分推广)

- 任意不可定向流形：
  定义：density密度$\mu : V \times \cdots \times V \to R$,满足$\mu(x_1, \ldots, x_n) = |\omega(x_1, \ldots, x_n)|$, ω是n形式。可定义积分；
- 光滑流形带角；如正方形，三角形。
  要定义带角光滑结构，分段积分，同样有Stokes 定理。

De Rham上同调群

Definition

给定光滑流形M,$d_p : \mathcal{A}^p(M) \to \mathcal{A}^{p+1}(M)$是线性映射
$\mathcal{Z}^p(M) = \ker d_p$, 即$M$上$p$阶闭形式；
$\mathcal{B}^p(M) = Im(d_{p-1})$,即$M$上$p$阶恰当形式；
De Rham上同调群(空间) $\mathcal{H}^p(M) = \frac{\mathcal{Z}^p(M)}{\mathcal{B}^p(M)}$

Theorem (同伦不变)

如果M, N同伦，则$\mathcal{H}^p(M) = \mathcal{H}^p(N)$。
特别它们是拓扑同胚不变量。

Theorem (de Rham 定理)

$\mathcal{H}^p(M)$和流形作为拓扑空间的上同调群同构。

向量场的积分?

Remark

- 流形上的积分定义：$\int_M \omega = \sum_i \int_M \psi_i \omega$
  $\int_E \omega = \int_D G^* \omega$
- 光滑函数，向量场的积分?
- Stokes定理：$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.
- 向量场的外微分?
- 黎曼流形的度量诱导向量场和微分形式的对偶。
  $\to$ 构造微分算子!

黎曼流形

- 设(M, g)是n维可定向流形
- 度量诱导同构：$g^\flat : TM \to T^*M$, $g^\flat(X)(Y) = g(X, Y)$，记为$X^\flat$.
  $g_\sharp(X^\flat) = X$
- (唯一)黎曼体积形式：$dV_g = \sqrt{det(g_{ij})}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$
- 可定向带边黎曼流形的边界诱导定向有
  $d\tilde{V}_g = (N \lrcorner dV_g)|_{\partial M}$.

散度

Definition (Hodge星算子)

可定向带边黎曼流形定义线性(同构)映射:$* : C^\infty(M) \to \mathcal{A}^n(M)$, $*f = fdV_g$

可以定义函数的积分$\int_M f \cong \int_M *f = \int_M fdV_g$.

Definition (散度)

定义:$\mathrm{div} : \mathcal{T}(M) \to C^\infty(M)$, $\mathrm{div}\, X = *^{-1}d(X \lrcorner dV_g)$,
即$d(X \lrcorner dV_g) = (\mathrm{div}\, X)dV_g$

几何意义: $\mathcal{L}_X dV_g = X \lrcorner d(dV_g) + d(X \lrcorner dV_g) = \mathrm{div}\, X dV_g$
向量场生成的流θ_t对积分区域体积$Vol(\theta_t(D))$的变化率是$\mathrm{div}\, X$
局部坐标: $\mathrm{div}(X^i \partial x_i) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(X^i \sqrt{\det g})$

散度定理

Theorem (黎曼流形散度定理)

(M, g)上任一紧致支集的向量场X，有
$\int_M (\mathrm{div}\, X)dV_g = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle d\tilde{V}_g$

Proof.

利用Stokes 定理;
$\int_M (\mathrm{div}\, x)dV_g = \int_M d(X \lrcorner dV_g) = \int_{\partial M} X \lrcorner dV_g$
黎曼超曲面上有$X \lrcorner dV_g = \langle X, N \rangle d\tilde{V}_g$
$\boxed{\text{outline:}}$ $X = \langle X, N \rangle N + X^T$,
$X^T \lrcorner dV_g(X_1, \ldots, X_{n-1}) = dV_g(X^T, X_1, \ldots, X_{n-1}) = 0$ □

曲面积分

$n = 3$维黎曼流形
构造线性(同构)映射:$\beta : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{A}^2(M)$, $\beta X = X \lrcorner dV_g$

Definition (旋度)

定义:$\mathrm{curl} : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$, $\mathrm{curl}\, X = \beta^{-1}d(X^\flat)$,
即$\mathrm{curl}\, X \lrcorner dV_g = d(X^\flat)$

Definition (曲面向量场积分)

S为紧致的二维嵌入子流形，令$dA = N \lrcorner dV_g$;
定义:$\int_S X \cong \int_S \langle X, N \rangle dA$

曲面积分的Stokes定理

Theorem

$\int_S \langle \mathrm{curl}\, X, N \rangle dA = \int_{\partial S} \langle X, T \rangle ds$
其中N是外法向量场，ds为S的边界的体积形式； T为S边界上的单位正向切向量场。

Proof.

利用Stokes定理有： $\int_S d(X^\flat) = \int_{\partial S} X^b$
$\mathrm{curl}\, X \lrcorner dV_g = d(X^\flat)$
$X^\flat|_{\partial S} = \langle X, T \rangle ds$
后面方程由$X^\flat = fds, ds(T) = 1$;
$f = fds(T) = X^\flat(T) = \langle X, T \rangle$
□

三维黎曼流形的微分算子

交换图表：

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(M) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, "Id"'] & \mathcal{T}(M) \arrow[r, "\mathrm{curl}"] \arrow[d, "\flat"'] & \mathcal{T}(M) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\beta"'] & C^\infty(M) \arrow[d, "*"'] \\
\mathcal{A}^0(M) \arrow[r, "d"] & \mathcal{A}^1(M) \arrow[r, "d"] & \mathcal{A}^2(M) \arrow[r, "d"] & \mathcal{A}^3(M)
\end{tikzcd}$$

Corollary

$\mathrm{curl} \circ \mathrm{grad} = 0, \mathrm{div} \circ \mathrm{curl} = 0$

拉普拉斯算子：$\triangle f = \pm \mathrm{div} \circ \mathrm{grad}\, f$

如果取负号与Laplace-Beltrami(Hodge定义)相同

局部坐标:$\triangle f = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x^i}(g^{ij}\sqrt{\det g}\frac{\partial f}{\partial x^j})$

Hodge星算子

Definition (Hodge 对偶)

给定线性积空间V，一个n形式$\omega = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$; 定义线性同构:
$* : A^k(V) \to A^{n-k}(V)$, $*(e^1 \wedge \cdots \wedge e^k) = e^{k+1} \wedge \cdots \wedge e^n$.

Proposition

- 诱导积表示 $\langle \xi, \eta \rangle \omega = \xi \wedge * \eta$
- 对偶$* \circ * \eta = (-1)^{k(n-k)} \eta$
- 积同构 $\langle \xi, \eta \rangle = \langle * \xi, * \eta \rangle$

Proposition (黎曼流形)

- 积$\int_M \langle \xi, \eta \rangle dV_g = \int_M \xi \wedge * \eta$
- $* dV_g = 1, *1 = dV_g$
- $\mathrm{div}\, X = * d * X^\flat$

调和算子

Definition (余外微分)

定义：$\delta : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^{k-1}(M)$,
$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} * d *$

有$\delta \circ \delta = 0$,
积共轭 $\langle d\eta, \xi \rangle = \langle \eta, \delta \xi \rangle$

Definition (调和算子)

定义*Laplace-Beltrami*：$\triangle : \mathcal{A}^k(M) \to \mathcal{A}^k(M), \triangle = d\delta + \delta d$

Remark

$\triangle f = -\mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, f$在*0*形式上与前面定义一致；
$\triangle \omega = 0$称为调和形式；
Hodge 定理：*(de Rham)*上同调群的元素由调和形式唯一确定。

流形上微积分的基本定理

Theorem (四个基本定理)

1. 逆函数定理：给定光滑映射$F : M \to N$，在任一p切映射F_*为双射，则存在邻域$p \in U, F(p) \in V$,使得$F|U : U \to V$是微分同胚。称为局部微分同胚。
2. *Stokes* 定理：$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.
3. *ODE*存在唯一定理：任一光滑向量场Y，存在唯一的极大局部流$\theta : D \subset R \times M \to M$,它的无穷小生成元是$Y$,且
   - θ^p是唯一极大积分曲线
   - θ_t是$M_t = (p : (t, p) \in D)$上的微分同胚。
   - $(\theta_t)_* Y(p) = Y(\theta_t(p))$, 称$Y$是关于$\theta$不变的。
4. 线性*PDE*存在唯一定理*(Frobenius*定理*)*：设L是M上的k维光滑分布*(*每一点是切空间的子空间*)*；如果它关于*Lie*括号封闭$[X, Y] \in L$,则存在一个积分流形它的分布是L.
   记$L = span(\partial y_1, \ldots, \partial y_k)$.

微分形式的其他应用

参见：《现代数学基础》

- 辛形式：$2n$维流形的反对称2形式$w=\sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i$,辛流形。
  应用： Halmilton 力学
- 偏微分方程的微分形式表示：
  例子：热传导方程，电磁场方程，连续流体力学方程
- 系统控制；