EXERCISE ONE

10/30 课堂交。 | 注(***)部分是选做.

1. (微分流形)给出你专业文献上提到的与微分流形或黎曼几何相关的若干专业名词，如果可能给出解释。

2. (向量空间)给n维向量空间一个微分结构，说明其是一个光滑流形。特别任一个$n \times m$维的矩阵群是一个nm维流形。

3. (球面) 给定$\mathbb{S}^n$是单位n维球,$N = (0, 0, \ldots, 1)$是北极.定义球极投影$\sigma : \mathbb{S}^n - N \to \mathbb{R}^n$, 其中 $\sigma(x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}) = \frac{(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{1 - x^{n+1}}$

   记$S = -N$为南极，定义$\sigma_t = -\sigma(-x), x \in \mathbb{S}^n - S$.

   以下证明可以仅仅考虑$n = 2$情形。

   (a) 证明: σ 是双射。求出逆映射。
   (b) 证明: σ^{-1}, σ_t^{-1}可以 给出了一个微分结构。
   (c) 证明：以上给出的微分结构与投射到平面(六个图坐标卡)得到的微分结构是相容的。

4. (微分同胚)

   (a) 构造单位开圆盘$|X| < 1$到R^2的微分同胚。***特别说明开正方形(不含边界)是否与单位开圆盘微分同胚? 注：他们是拓扑同胚。
   (b) 构造$z = x^2 + y^2$与$z = 0$的微分同胚。
   (c) 定义S^2上的对径映射$\alpha(x) = -x$,给出它的一个坐标表示，说明它是一个微分同胚。

5. (切向量与切映射)（教材P8，注5.）

   (a) 任意$p \in R^2$,给出其切空间TR^2_p的基，对于每个基给出以其为切向量的一条曲线。
   (b) 设$X : U \to M$是一个参数化，给出$TM_{X(p)}$的基.
   (c) X也可看成U到M的光滑映射. 取$e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$为$TR^2_p$的切向量,利用曲线的复合， 证明：$dX_p(e_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, 2.$
   (d) 给出双曲面$x^2 + y^2 - z^2 = 1$的一个参数化(利用双曲函数$\cosh, \sinh$),给出所有过$(x, y, 0)$点的切平面。证明：它们都平行与Z轴。

6. (线性映射的分类)给定光滑映射$\phi : M \to N$，其一点切映射$d\phi_p$是单的当且仅当$rank(d\phi) = dim(M)$. $d\phi_p$是满的当且仅当$rank(d\phi) = dim(N)$.

7. (浸入子流形)
   (a) （环面上的曲线) $\gamma : \mathbb{R} \to T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2, r(t) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi ict})$,其中$c$为无理数。说明曲线是单浸入子流形不是嵌入子流形。
   ***说明当c为整数和有理数时，曲线的形状。
   (b) 曲面$x^2 + y^2 = z^2 \subset R^3$是否是浸入子流形?
8. (水平集)定义函数$f : R^n \to R$,水平集是$f(x_1, \ldots, x_n) = c$的原像。
   (a) $f(x, y) = x^3 - y^2$,说明$f(x, y) = 0$不是嵌入子流形。可否是浸入子流形呢?
   (b) $f(x, y) = x^3 + xy + y^3$, 说明c取哪些值时，水平集是嵌入子流形。
   (c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$,说明$c$取哪些值时，水平集是嵌入子流形。
9. (Lie Bracket)
   (a) 证明：Jacobi恒等式。
   (b) 给定$\mathbb{R}^3$上的向量场$V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, W = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, U = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$, 计算$[V, W], [W, U], [U, V]$,并验证Jacobi恒等式。
10. (***选做思考:建议了解.)
    (a) ***证明：光滑流形的开子集是光滑流形，光滑流形的乘积还是光滑流形。
    (b) ***说明单位开圆盘上有无穷多个微分结构。
    (c) *** 说明 切丛 TR^n微分同胚与R^{2n}.
    (d) ***构造S^{2n-1}上的一个处处不为零的光滑向量场。